考研数学错题集

Weary Bird

2025 年 8 月 19 日

习题来源

1. 李林-880
2. 李正元复习全书
3. 张宇 1000 题
4. 李艳芳 900 题
5. 历年真题与模拟题

梅花引·荆溪阻雪

白鸥问我泊孤舟，是身留，是心留？心若留时，何事锁眉头？风拍小帘灯晕舞，对闲影，冷清清，忆旧游。

旧游旧游今在否？花外楼，柳下舟。梦也梦也，梦不到，寒水空流。漠漠黄云，湿透木棉裘。都道无人愁似我，今夜雪，有梅花，似我愁。

2025 年 8 月 19 日

目录

第一章　高等数学

1.1　极限与连续

1. $\star$ 设函数 $f(x) = \cos(\sin x), g(x) = \sin(\cos x)$ 当 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时 ( )

   A.$f(x)$ 单调递增,$g(x)$ 单调递减　　B.$f(x)$ 单调递减,$g(x)$ 单调递增

   C.$f(x), g(x)$ 均单调递减　　D.$f(x), g(x)$ 均单调递增

2. $\star\star$ 讨论函数 $f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的连续性

3. $\star\star$ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $a < c < d < b$ 证明: 在 (a,b) 内必定存在一点 ξ 使得 $mf(c) + nf(d) = (m+n)f(\xi)$, 其中 m, n 为任意给定的自然数

4. $\star\star$ 设 $x_1 = \sqrt{a}(a > 0), x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求出其值.

5. $\star\star\star$ 设 $x_1 = a \geq 0, y_1 = b \geq 0, a \leq b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}(n = 1, 2, \ldots)$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

6. $\star\star$ 设 $\{x_n\}$ 为数列, 则下列数据结论正确的是 ( )

   ① 若 $\{\arctan x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛

   ② 若 $\{\arctan x_n\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

   ③ 若 $x_n \in [-1, 1]$, 且 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{\arctan x_n\}$ 收敛

   ④ 若 $x_n \in [-1, 1]$, 且 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{\arctan x_n\}$ 收敛

   A.①②　　B.③④　　C.①③　　D.②④

7. $\star$ 极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1 + x^2}}$=____

8. $\star$ 设 $a_n = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1}\sqrt{1 + x^n}\mathrm{d}x$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$=____

9. $\star\star$ 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{a\,[x]+\dfrac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\right\}=b$ 则 a=___,b=___

10. $\star$ 设 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\dfrac{1}{2}(x_n+x_{n+1})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

11. $\star\star\star$ 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$ 证明

 (I) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{1}{2})$

 (II) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{1}{n})(n\geq 2,n\in\mathbb{N})$

12. $\star\star\star\star$(2011. 数一)

 (I) 证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$

 (II) 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$ 存在

1.2 一元函数微分学/积分学 (除证明题)/多元函数微分学

1. $\star$ 设 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 均存在, 则下列结论正确的是 ( )

 A.$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 存在 B.$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

 C.$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 存在 D.$f(x,y)$ 在去心邻域 (x_0,y_0) 内有定义

2. $\star$ 设 $z=(1+xy)^y$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{1,1}=$ ___

3. $\star\star$ 设 $\begin{cases}y=f(x,t)\\F(x,y,t)=0\end{cases}$ f,F 有一阶连续偏导数, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ____

4. $\star\star$ 设 $y=f(x,t),t=t(x,t)$ 由方程 $G(x,y,t)=0$ 确定,f,G 可微, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ____

5. $\star$ 设 $z=z(x,y)$ 有方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=$ ____

6. $\star$ 曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $P(2,1,4)$ 处的且平面方程为 ___ 法线方程 ___

7. $\star$ 求 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 的极值

8. $\star\star$ 求双曲线 $xy=4$ 与直线 $2x+y=1$ 之间的最短距离

1.3 空间解析几何/多元函数积分学

1. $\star$ 设向量 $\vec{a}=(1,2,1),\vec{b}=(-1,0,2),\vec{c}=(0,k,-3)$ 共面, 则 $k=$ ___

2. $\star\star$ 设非零向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 满足 $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ 于 $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ 的模相等, 则必有 ( )

   A.$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ B.$\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ C.$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{0}$ D.$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

3. $\star\star$ 直线 $L_1:\begin{cases}x-1=0\\y=z\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y=0\\z+2=0\end{cases}$ 的距离 $d=$___

4. $\star\star$ 设 α,β 均为单位向量, 其夹角为 $\frac{\pi}{6}$ 则 $\alpha+2\beta$ 与 $3\alpha+\beta$ 为邻边的平行四边形的面积为 ___

5. $\star\star$ 设 α,β 是非零常向量, 夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $|\beta|=2$ 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|\alpha+x\beta|-|\alpha|}{x}=$___

6. $\star$ 求平行于平面 $x+y+z=9$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程.

7. $\star$ 设平面 π 过直线 $L:\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi_1:x-4y-8z+12=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 求平面 π 的方程

8. $\star$ 求与直线 $L_1:x+2=3-y=z+1$ 与 $L_2:\frac{x+4}{2}=y=\frac{z-4}{3}$ 都垂直相交的直线方程

9. $\star$ 求直线 $L_1:\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-1}{0}$ 与 $L_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=z$ 的公垂线方程

10. $\star\star$ 求直线 $L:\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{1}$ 绕直线 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 旋转一周所得到的曲面方程

1.4 常微分方程

1.5 无穷级数

1.6 证明题

第二章　线性代数

2.1　行列式, 矩阵, 向量

2.2　线性方程组

2.3　矩阵特征值与特征向量, 二次型

第三章　概率论

3.1　事件与概率, 随机变量及其分布

1.

3.2　多维随机变量

3.3　数字特征

3.4　后三章

第四章 真题与模拟题

备注

▲ 表示难度, 越多越难 ♦ 表示计算量, 越多计算量越大

4.1 数学真题一网打尽

1. ▲▲ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

Solution

显然是一道夹逼定理的题目, 但有几点需要注意.

$$\text{原式}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi \xlongequal{n\to\infty}\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x$$

放大这一方向是比较好想的, 重点在于缩小.

$$\text{原式}>\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi\xlongequal{n\to\infty}\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1\sin\pi x=\frac{2}{\pi}$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n\to\infty}\text{原式}=\frac{2}{\pi}$$

2. ▲▲ 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 连续, 则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(\ )$

A. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\cdot\frac{1}{2n}$

B. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\cdot\frac{1}{n}$ **D.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\cdot\frac{2}{n}$

解法一 正面突破

这道题显然是考察定积分的定义, 但考察的比较细节.

i 其中 (A)(B) 选项是将区间进行 n 等分的划分, 且取的是区间重点, 如何得知呢? 考虑端点 $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{k}{n},\frac{k+1}{n},\dots,\frac{n}{n}$ 而

$$\frac{k-1}{n}=\frac{2k-2}{2n}<\frac{2k-1}{2n}<\frac{2k}{2n}=\frac{k}{n}$$

故由定积分的定义, 此时有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{2k-1}{2n})\cdot\frac{1}{n}$$

ii 其中 (C)(D) 是将区间进行 $2n$ 等分的划分, 取的分别是左/右端点, 这并不影响定积分形式, 应该为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} f(\frac{k}{2n})\cdot\frac{1}{2n}$$

解法二 选择题不客气!

取 $f(x)=1$ 则 $\int_0^1 1\mathrm{d}x=1$, 对应的选项可以直接计算, 结果为

(A) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\neq 1$

(B) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1$

(C) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\frac{1}{n}=2\neq 1$

(D) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\frac{2}{n}=4\neq 1$

定积分的定义

定积分的定义有如下几个要点

(1) 将区间 $[a,b]$ 划分为 n 个区域, 其中记

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$$

记自区间长度即模为

$$\lambda=\max\{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_{n-1},\Delta_n\}$$

(2) 在每个子区间上取任意一点 ξ_i 取其函数值 $f(\xi_i)$, 则 Riemann 和为

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

当 $\lambda\to 0$ 时, 若 S 极限存在, 且分割方式与 ξ_i 无关, 则称该极限为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分, 如下

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

3. ▲(1999.2)$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x(n=1,2,\ldots)$, 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减且非负的连续函数证明数列 $\{a_n\}$ 极限存在

Solution

先证明单调性, 作差有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{积分中值定理}}f(n+1)-f(\xi),\xi\in(n,n+1)\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减故 $a_{n+1}-a_n<0\implies$ 原数列单调递减.

再证明有界性由于

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

原式化为

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]+f(n)$$

由于 $f(x)$ 非负且单调递减, 容易直到 $f(k) > \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x$ 故原式一定有

$$原式 \geq 0$$

即原数列单调递减有下界, 故原数列收敛.

4. (2011-12) ▲▲

(1) 证明: 对于任意的正整数 n, 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(2) 设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛

拉氏中值 + 单调有界证明

(1) 令 $f(x) = \ln(1+x)$ 则

$$\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln 1 = f'(\xi)\cdot\frac{1}{n}, \xi \in (0, \frac{1}{n})$$

即

$$\frac{n}{n+1} < \frac{1}{1+\xi} < 1$$

综上有

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

(2) 首先证明其单调, 作差有

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) < 0$$

即原数列单调递减, 只需证明其有下界即可. 考虑

$$\begin{aligned} a_n &= 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - lnn \\ &> \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \ldots + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n \\ &= \ln(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0 \end{aligned}$$

故原数列单调递减有下界, 即其极限值存在.

积分放缩法

由积分保号性, 若需证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 只需证明 $f(x) > g(x)$

(1) 考虑如下操作

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+n) - \ln n < \frac{1}{n}$$
$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \frac{1}{n}$$
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\mathrm{d}x < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\mathrm{d}x$$

显然在 $(n, n+1)$ 上有 $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n}$, 故原不等式得证

(2) 证明单调性, 作差有

$$a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x < 0$$

证明有下界有

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x > 0$$

有没有很眼熟, 没错, 正是上一题 (1999.2) 的所考察的证明!

故原数列单调递减有下界, 其极限存在.

收敛级数

(1) 不等式最基本的方法应该想到构建函数, 证明单调性. 不妨令 $x = \frac{1}{n}$, 原不等式等价于证明

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x \in (0,1)$$

令 $f(x) = x - \ln(1+x)$ 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} > 0$, 故 $f'(x)$ 单调递增, 即 $f(x) > f(0) = 0$, 同理可证明左边不等式.

(2) 基于如下结论

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n\text{存在} \iff \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)\text{收敛}}$$

由于

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})$$

故数列 $\{a_n\}$ 与级数 $\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})$ 同敛散.

由于 $|a_n - a_{n-1}| = \left|\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right|$ 做 Taylor 展开有

$$\begin{aligned}|a_n - a_{n-1}| &= \left|\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right]\right| \\ &= \left|-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right| \sim \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 由比较判别法可知原级数绝对收敛, 故而原级数收敛. 从而数列极限存在

5. (2012-2) ▲

(1) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1(n > 1, n \in \mathbf{N})$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内仅有一个实根

(2) 记 (I) 中的实根为 x_n 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求出此极限

Solution

(1) 令 $f(x) = x^n + \ldots + x - 1, f'(x) = nx^{n-1} + \ldots + 2x + 1 > 0$ 故 f(x) 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递增, 又有

$$\begin{cases} f(1) = n - 1 > 0 \\ f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n} < 0 \end{cases}$$

由零点存在定理可知, 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上仅有唯一零点

(2) 考虑 $f(x)_{n+1} = x^{n+1} + x^n + \ldots + x - 1$ 由 (1) 可知

$$\begin{cases} f(x_n)_{n+1} = x_n^{n+1} > 0 \\ f(\frac{1}{2})_{n+1} = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0 \end{cases}$$

故在区间 $(\frac{1}{2}, x_n)$ 中有唯一零点 x_{n+1} 因此有

$$\frac{1}{2} < x_{n+1} < x_n$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界故极限存在.

不妨令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 带入 $f(x)$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{1 - x_n} = 1$$

即

$$\frac{a-0}{1-a} = 1 \implies a = \frac{1}{2}$$

6. ▲(2013.2) 设函数 $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$

(1) 求 $f(x)$ 的最小值

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \dfrac{1}{x_{n+1}} < 1$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求此极限

Solution

(1) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}(x > 0)$ 有 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减, 在 $(1,+\infty)$ 上递增, 故 $f(1) = 1$ 为 $f(x)$ 的最小值

(2) 由题设有

$$\ln x_n < \ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1 = \ln e$$

有 $\ln x$ 单调, 故 $0 < x_n < e$ 又由于 (1) 可知 $1 = f(1) < f(x_n) \implies x_{n+1} < x_n$ 故原数列单调递减有下界故其极限存在, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 有题设有

$$\ln a + \frac{1}{a} \leq 1$$

又因为

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$$

故 $a = 1$ 即

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 1}$$

7. ▲ 设对任意的 x, 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$( )

A. 存在且等于零

B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在

D. 不一定存在

Solution

对于 A,B 选项, 不妨取 $f(x)=g(x)=\varphi(x)=x$ 但是 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 不存在

对于 C 选项, 不妨取 $f(x)=g(x)=\varphi(x)=1$, 此时 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

夹逼定理

原式形式

$$n\text{充分大时},\begin{cases}\varphi(n)\le f(n)\le g(n)\\ \lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=\lim\limits_{n\to\infty}g(n)=A\end{cases}\implies \lim_{n\to\infty} f(n)=A$$

考虑题设的 $\lim\limits_{n\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 则有

$$0\le f(x)-\varphi(x)\le g(x)-\varphi(x)\implies \lim_{n\to\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$$

也可以看出 $f(x)$ 的极限与 $\varphi(x)$ 有关, 若 $\varphi(x)$ 存在则 $f(x)$ 极限也存在否则不存在.

8. ▲(2007-12) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $f''(x)>0$, 令 $u_n=f(n)(n=1,2,\ldots)$ 则下列结论正确的是 ( )

A. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛

B. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

C. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛

D. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

拉格朗日中值定理

存在 $\xi_n\in(n,n+1), u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)$ 进而有 $u_{n+1}=u_n+f'(\xi_n)$, 由于 $f''(x)>0\implies f'(x)$ 单调递增, 此时有

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=u_n+f'(\xi_n)\\&=u_{n-1}+f'(\xi_{n-1})+f'(\xi_n)\\&\ldots\\&=u_1+\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)\\&>u_1+nf'(\xi_i)=u_1+n(u_2-u_1)\end{aligned}$$

显然当 $u_2>u_1$ 当 $n\to\infty, u_n>+\infty$ 显然极限不存在.

选择题不客气

对于选项 A,$f(x)=\frac{1}{x}-x$

对于选项 B,$f(x)=\frac{1}{x}$

对于选项 C,$f(x)=x^2$

级数

由于 $u_{n+1}-u_n=f'(\xi_n)>f'(\xi_i)=u_2-u_1>0$ 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}-u_n\neq 0$ 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 极限不存在, 由定义有其部分和不存在, 即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}-u_1$$

进而可知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在.

9. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $a\neq 0$ 则当 n 充分大的时候, 有 ( )

A. $|a_n|>\frac{|a|}{2}$ **B.** $|a_n|<\frac{|a|}{2}$ **C.** $a_n>a-\frac{1}{n}$ **D.** $a_n<a+\frac{1}{n}$

10. 设有数列 $\{x_n\}$, $-\frac{\pi}{2}\leq x_n\leq\frac{\pi}{2}$ 则 ( )

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在

11. 已知 $a_n=\sqrt[n]{n}-\frac{(-1)^n}{n}(n=1,2,\ldots)$ 则 $\{a_n\}$( )

A. 有最大值与最小值 **B.** 有最大值无最小值

C. 有最小值无最大值 **D.** 无最大值与最小值

12. ♦♦ 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi'\neq -1$

(1) 求 $\mathrm{d}z$

(2) 记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$

13.

4.2　超越 (11-25 年)

4.3 共创 (22,23,24) 年

4.4 25 年模拟卷 (百来套)